R2 - Vektorer i rommet - 26.01.17

Del I - Uten hjelpemidler

Løsningsskisser - versjon 31.01.17

Oppgave 1

Gitt vektorene $\vec{u} = [1,2,3]$ og $\vec{v} = [2,-1,4]$.

a) Regn ut $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) Regn ut $\vec{u} \times \vec{v}$ c) Regn ut $\vec{w} = \vec{u} + t\,\vec{v}$

d) Løs vektorligningen $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

e) For hvilken verdi av t er $|\vec{w}|$ minst? Kommenter svaret.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [1,2,3] \cdot [2,-1,4] = 1 \cdot 2 + 2(-1) + 3 \cdot 4 = 12$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = [1,2,3] \times [2,-1,4] = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = [11,2,-5]$

c) $\vec{w} = \vec{u} + t\,\vec{v} = [1,2,3] + t[2,-1,4] = [1+2t, 2-t, 3+4t]$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow [2,-1,4] \cdot [1+2t, 2-t, 3+4t] = 0 \Leftrightarrow$
$2 + 4t - 2 + t + 12 + 16t = 0 \Leftrightarrow 21t + 12 = 0 \Leftrightarrow$
$t = -\frac{12}{21} = -\frac{4}{7}$

e) $|\vec{w}| = \sqrt{(1+2t)^2 + (2-t)^2 + (3+4t)^2} = \sqrt{21t^2 + 24t^2 + 14} = \sqrt{f(t)}$
$|\vec{w}|$ og $f(t)$ er minst når $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 42t + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$t = -\frac{24}{42} = -\frac{4}{7}$

Vi ser at vi får samme svar i d) og e).
$\vec{w} = \vec{u} + t\,\vec{v} = [1+2t, 2-t, 3+4t]$ er en posisjonsvektor for et punkt på en linje, altså en linje på vektorform, med $\vec{v}$ som retningsvektor.
Når $\vec{w} \perp \vec{v}$ er $\vec{w}$ kortest og representerer avstanden fra Origo til linjen.
Dette skjer når $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$, som i d), og også når $f(t)$ er minst som i e).

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

u:=(1,2,3)

$\rightarrow\ \mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

v:=(2,-1,4)

$\rightarrow\ \mathbf{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

u*v

$\rightarrow\ 12$

u⊗v

$\rightarrow\ \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

w:=u+t v

$\rightarrow\ \mathbf{w} := \begin{pmatrix} 2t+1 \\ -t+2 \\ 4t+3 \end{pmatrix}$

w*v=0

Løs: $\left\{ t = -\frac{4}{7} \right\}$

g(t):=|w|

$\rightarrow\ g(t) := \sqrt{21t^2 + 24t + 14}$

g'(t)=0

Løs: $\left\{ t = -\frac{4}{7} \right\}$

Oppgave 2

Gitt punktene $A = (2,0,2)$ og $B = (1,3,4)$.

a) Finn parameterfremstillingen for linjen l gjennom A og B.

b) Finn skjæringspunktet mellom linjen l og yz-planet.

c) Regn ut avstanden mellom origo og linjen l.

d) Finn avstanden mellom linjen l og z-aksen.

e) Finn punktet på z-aksen som er nærmest linjen l.

a) Retningsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = [-1,3,2]$
Punkt A og retningsvektor $\vec{r}$ gir posisjonsvektor til punkt på linje:
$[x,y,z] = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{r} = [2,0,2] + [-1,3,2]t = [2-t, 3t, 2+2t]$ (Vektorform)
Paramterform:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \ t \\ y = \quad\ 3t \\ z = 2 + 2t \end{array} \right\}$$

b) yz-plan: $x = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$
$y = 3 \cdot 2 = 6$
$z = 2 + 2 \cdot 2 = 6$
Skjæringspunkt: $S_{yz} = (0,6,6)$

c) Som høyde i parallellogram utspent av $\vec{r}$ og $\overrightarrow{AO}$:
$\overrightarrow{AO} = [-2,0,-2]$

$$h = \frac{|\overrightarrow{AO}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|[-2,0,-2]\times[-1,3,2]|}{|[-1,3,2]|} = \frac{|[6,6,-6]|}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{42}$$

(Alternativt med projeksjon: (Ikke bland disse metodene!)

$$p = \frac{|\overrightarrow{AO}\cdot\vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|[-2,0,-2]\cdot[-1,3,2]|}{|[-1,3,2]|}\ \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$h = \sqrt{\overrightarrow{AO}^2 - p^2} = \sqrt{8-(\frac{2}{\sqrt{14}})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{42}\quad)$$

d) Vindskjeve linjer:

z-aksen: $O = (0,0,0)$ og $\vec{r_z} = [0,0,1]$
l : $A = (2,0,2)$ og $\vec{r} = [-1,3,2]$

Normalvektor til begge linjer: $\vec{r_z}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = [-3,-1,0]$

Velger: $\vec{n} = [3,1,0]$

Avstand som projeksjon av $\overrightarrow{AO} = [-2,0,-2]$ på $\vec{n}$:

$$a_{lz} = \left|\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

e) Nærmeste punkt på z-aksen: $C = (0,0,z)$

Vektor fra C til punkt P på linjen:

$\overrightarrow{CP} = [2-t, 3t, 2+2t-z]$

Må stå normalt på begge og derfor være parallell med normalvektor:

$$\overrightarrow{CP} = k\vec{n} \Leftrightarrow [2-t,3t,2+2t-z] = k[3,1,0] \Leftrightarrow$$
$$2-t = 3k \wedge 3t = k \wedge 2+2t-z = 0 \Leftrightarrow$$
$$2-t = 9t \wedge k = 3t \wedge 2+2t-z = 0 \Leftrightarrow$$
$$t = \tfrac{1}{5} \wedge k = \tfrac{3}{5} \wedge z = \tfrac{12}{5}$$

): $C = (0,0,\frac{12}{5})$

(Alternativt med CP som korteste avstand mellom linjene:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{OC} + \frac{6}{\sqrt{10}}\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} = \overrightarrow{OP}$ (Lager enhetsvektor: $\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$ langs normalvektor.)

$$[0,0,z] + \frac{6}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{10}}[3,1,0] = [2-t,3t,2+2t] \Leftrightarrow$$
$$[\tfrac{9}{5},\tfrac{3}{5},z] = [2-t,3t,2+2t] \Leftrightarrow$$
$$\tfrac{9}{5} = 2-t \wedge \tfrac{3}{5} = 3t \wedge z = 2+2t \Leftrightarrow$$
$$t = \tfrac{1}{5} \wedge t = \tfrac{1}{5} \wedge z = \tfrac{12}{5}$$

): $C = (0,0,\frac{12}{5})$)

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

A:=(2,0,2)

$\rightarrow \; A := (2,0,2)$

B:=(1,3,4)

$\rightarrow \; B := (1,3,4)$

r:=Vektor[A,B]

$\rightarrow \; r := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

l:=Linje[A, r]

$\rightarrow \; \ell : y = (2,0,2) + \lambda \, (-1,3,2)$

eller

pos(t):=Vektor[A]+r t

$\rightarrow \; pos(t) := (2-t, 3t, 2+2t)$

pos(t)=(0,y,z)

Løs: $\{\{y = 6, z = 6, t = 2\}\}$

): S=(0,6,6), når t=2

f(t):=|Vektor[pos,(0,0,0)]|

$\rightarrow \; f(t) := \sqrt{2}\,\sqrt{7t^2 + 2t + 4}$

f'(t)=0

Løs: $\left\{t = -\frac{1}{7}\right\}$

f(-1/7)

$\rightarrow \; \frac{3}{7}\sqrt{42}$

Eller som høyde i utspent parallellogram av ao og r:

ao:=Vektor[A,(0,0,0)]

$\rightarrow \; ao := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

|ao⊗r/|r||

$\rightarrow \; \frac{3}{7}\sqrt{42}$

vindskjeve linjer z-akse og linje:

n:=r⊗(0,0,1)

$\rightarrow \; n := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

|ao*n/|n||

$\rightarrow \; \frac{3}{5}\sqrt{10}$

cp:=pos(t)-(0,0,z)

$\rightarrow \; cp := \begin{pmatrix} 2-t \\ 3t \\ 2+2t-z \end{pmatrix}$

cp=k*n

Løs: $\left\{\left\{z = \frac{12}{5}, k = \frac{3}{5}, t = \frac{1}{5}\right\}\right\}$

): C=(0,0,12/5)

Oppgave 3

Ett plan α går gjennom $A = (3,0,0)$, $B = (1,3,1)$ og $C = (2,2,5)$.

a) Vis at ligningen for planet α blir $13x + 9y - z - 39 = 0$

b) Finn skjæringspunktet mellom planet og z-aksen.

c) Finn volumet av pyramiden $ABCO$, der $O = (0,0,0)$.

d) Finn en parameterfremstilling for planets skjæringslinje med xy-planet.

a) $\overrightarrow{AB} = [-2,3,1]$, $\quad \overrightarrow{AC} = [-1,2,5]$

Normalvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = [13, 9, -1]$

Ligning: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow [x-3, y, z] \cdot [13, 9, -1] = 0 \Leftrightarrow$
$13x + 9y - z - 39 = 0$

b) z-aksen: $x = y = 0 \Rightarrow z = -39$
): $S_z = (0, 0, -39)$

c) $\overrightarrow{AO} = [-3, 0, 0]$

Volum utspent av $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ (trekantet pyramide):
$V = \frac{|\overrightarrow{AO} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|}{6} = \frac{|[-3,0,0] \cdot [13,9,-1]|}{6} = \frac{13}{2}$

d) xy-planet: $z = 0 \Rightarrow 13x + 9y - 39 = 0$

Enklest å velge y som parameter: $y = t \Rightarrow x = \frac{39-9y}{13} = 3 - \frac{9}{13}t$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3 - \frac{9}{13}t \\ y = t \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

Kan innføre ny parameter $s = \frac{t}{13}$ og får da isteden:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3 - 9s \\ y = 13s \\ z = 0 \end{array} \right\}$$

(Alternativt, mer standard, men tungvindt:

Retningvektor for linje: $\vec{r} = \vec{r_z} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 13 & 9 & -1 \end{vmatrix} = [-9, 13, 0]$

Punkt D i plan, som også ligger i xy-plan:
$z = 0, y = 0$ (Velger en enkel y)): $D = (3, 0, 0)$

Punkt D og $\vec{r}$ gir parameterfremstilling: $\left\{ \begin{array}{c} x = 3 - 9s \\ y = \quad 13s \\ z = 0 \end{array} \right\}$)

For *eksemplets* skyld tar jeg det også i GeoGebra CAS:

A:=(3,0,0)

→ $A := (3, 0, 0)$

B:=(1,3,1)

→ $B := (1, 3, 1)$

C:=(2,2,5)

→ $C := (2, 2, 5)$

ab:=Vektor[A,B]

→ $ab := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

ac:=Vektor[A,C]

→ $ac := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

n:=ab⊗ac

→ $n := \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

(x-3,y,z)*n=0

→ $13\,x + 9\,y - z - 39 = 0$

{$7, x = 0, y = 0}

Løs: $\{\{x = 0, y = 0, z = -39\}\}$

ao:=Vektor[A,(0,0,0)]

→ $ao := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

|ao*(ab⊗ac)|/6

→ $\frac{13}{2}$

Løs[$7,x]

→ $\left\{x = -\frac{9}{13}\,y + \frac{1}{13}\,z + 3\right\}$

ByttUt[$11,{z = 0, y = t}]

→ $\left\{x = -\frac{9}{13}\,t + 3\right\}$

): Parameterfremstilling: { x=3-9/13 t, y=t, z=0 }

Del II - Med hjelpemidler

Oppgave 4

Et plan α skjærer x-aksen i $A = (a, 0, 0)$, y-aksen i $B = (0, b, 0)$ og z-aksen i $C = (0, 0, c)$.

a) Bestem arealet av trekanten ABC.

b) Vis at en normalvektor til planet blir $[bc, ac, ab]$.

c) Vis at ligningen for planet kan skrives $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

d) Bestem avstanden fra planet til origo, $O = (0, 0, 0)$.

Med GeoGebra CAS:

a) Areal utspent av vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ som vektorprodukt.
b) Vektorproduktet i a) er også normalvektor til plan.

c) $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

d) Projeksjon av $\overrightarrow{AO}$ på normalvektor.

A:=(a,0,0)

$\rightarrow \ \mathbf{A} := (a, 0, 0)$

B:=(0,b,0)

$\rightarrow \ \mathbf{B} := (0, b, 0)$

C:=(0,0,c)

$\rightarrow \ \mathbf{C} := (0, 0, c)$

ab:=Vektor[A,B]

$\rightarrow \ \mathbf{ab} := \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

ac:=Vektor[A,C]

$\rightarrow \ \mathbf{ac} := \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

|ab⊗ac|/2

$\rightarrow \ \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$

n:=ab⊗ac

$\rightarrow \ \mathbf{n} := \begin{pmatrix} b\,c \\ a\,c \\ a\,b \end{pmatrix}$

(x-a,y,z)*n=0

RegnUt: $-a\,b\,c + a\,b\,z + a\,c\,y + b\,c\,x = 0$

(Divisjon med abc gir ønsket svar.)

ao:=Vektor[A,(0,0,0)]

$\rightarrow \ \mathbf{ao} := \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

|ao*n/|n||

$\rightarrow \ \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} \ |a| \ |b| \ \frac{|c|}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}$

Enklere:

|abc|/sqrt((a b)^2+(a c)^2+(b c)^2)

$\rightarrow \ \frac{|abc|}{\sqrt{(a\,b)^2 + (a\,c)^2 + (b\,c)^2}}$

Oppgave 5

Gitt en linje l : $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{array} \right\}$ og et punkt $A = (3, 4, 5)$.

Finn ligningen for et plan α gjennom linjen l som inneholder punktet A.

Med GeoGebra CAS:

Linjen har retningsvektor: $\vec{r} = [1, -1, 2]$ og punkt $B = (1, 2, 1)$

Lager vektor: $\overrightarrow{AB}$ som også ligger i planet.

Normalvektor til planet ut fra:$\overrightarrow{AB} \times \vec{r}$

Punktet B og normalvektor gir da ligning:

A:=(3,4,5)

→ $A := (3, 4, 5)$

B:=(1,2,1)

→ $B := (1, 2, 1)$

r:=(1,-1,2)

→ $r := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ab:=Vektor[A,B]

→ $ab := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

ab⊗r

→ $\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Velger:

n:=(2,0,-1)

→ $n := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(x-1,y-2,z-1)*n=0

→ $2x - z - 1 = 0$

Oppgave 6

Gitt punktene $A = (5, 1, 2)$ og $B = (4, 5, 2)$.

Finn parameterfremstillingen for en linje l som går gjennom A, har avstanden 3 fra B og er parallell med yz-planet.

Med GeoGebra CAS:

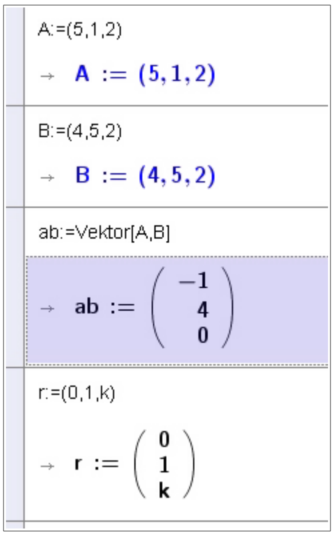
Parallell med yz-plan betyr at det ikke er noen x-komponent i retningvektor;
$\vec{r} = (0, 1, k)$

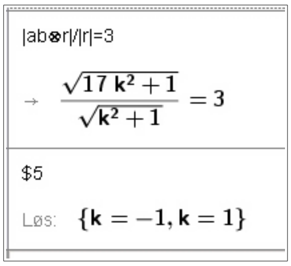
OBS: Lurt ikke å bruke to ukjente; $\vec{r} = (0, k, l)$, lengden er uviktig, så det er bare *forholdet* mellom y- og z-koordinat som er viktig!

Avstanden fra B til linjen som høyden i utspent parallellogram;
$\frac{|\vec{AB} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = 3$
gir ligning med løsning $k = \pm 1$, som igjen gir parameterfremstillingen:

$$\vec{OP} = [x, y, z] = \vec{OA} + \vec{r}\,t = [5, 1, 2] + [0, 1, \pm 1]t = [5, 1 + t, 2 \pm t] \iff$$

$$\text{Linje:} \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 + t \\ z = 2 \pm t \end{array} \right\}$$





(Med $\vec{r} = [0, k, l]$ ville vi fått:

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = 3 \Leftrightarrow \frac{|[-1,4,0] \times [0,k,l]|}{\sqrt{k^2+l^2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{|[4l, l, -k]|}{\sqrt{k^2+l^2}} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{16l^2+l^2+k^2}}{\sqrt{k^2+l^2}} = 3 \Rightarrow \frac{17l^2+k^2}{k^2+l^2} = 9 \Leftrightarrow 8l^2 = 8k^2 \Leftrightarrow l = \pm k$$

): $\vec{r} = [0, k, \pm k] = k[0, 1, \pm 1]$, og her kan vi velge $k = 1$ og få $\vec{r} = [0, 1, \pm 1]$, da lengden av $\vec{r}$ ikke spiller noen rolle.
